Algèbres inclinées de graphe sous-jacent $\mathbb{A}_n$

par

Mario LAMBERT

mémoire présenté au Département de mathématiques et d'informatique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, octobre 2009

Pour celle ou celui
à qui vous souhaitez
dédier ce travail
fort bien fait.

SOMMAIRE

En théorie des représentations des algèbres, les algèbres dites inclinées jouent un rôle très important. Il est donc primordial de pouvoir les classifier. C'est dans cet ordre d'idées que ce mémoire est produit.

Soit $A = kQ/I$ une algèbre de carquois lié dont le graphe sous-jacent au carquois ordinaire Q est un diagramme de Dynkin $\mathbb{A}_n$. On donnera une nouvelle preuve d'un résultat de Huard permettant de vérifier si une telle algèbre est inclinée ou non. En fait, on démontrera le théorème suivant :

Théorème 0.1 *Soit $A = kQ_A/I$ avec $\overline{Q}_A = \mathbb{A}_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors, A est inclinée si et seulement si (Q_A, I) n'a pas de double zéro.*

Enfin, on formulera une conjecture similaire, vérifiée à l'aide de l'ordinateur, dans le cas où le graphe sous-jacent est $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$ et l'idéal I est engendré par deux relations.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de maîtrise, M. Ibrahim Assem, pour les nombreux échanges mathématiques qui m'ont été si bénéfiques au cours des deux dernières années. Je veux aussi souligner la grande disponibilité de M. Shiping Liu que j'ai interrompu à maintes reprises dans ses travaux. Je veux remercier tous les membres de l'équipe d'algèbre de l'Université de Sherbrooke et de Bishop's University, tant pour les discussions algébriques que pour l'esprit de camaraderie qui a toujours régné au sein de l'équipe. Je voudrais aussi remercier tous mes confrères et consoeurs de travail du 1021 qui ont su m'épauler tout au long de la réalisation de ce mémoire. Ce mémoire a été rendu possible grâce au soutien financier du Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG).

Mario Lambert

Sherbrooke, janvier 2001

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

INTRODUCTION

En mathématiques, une technique souvent utilisée dans la résolution de problèmes est de remplacer l'objet d'étude par un autre équivalent, mais mieux connu. En 1835, W.R. Hamilton [Ham37] l'a fait lorsqu'il a représenté les nombres complexes comme des paires de nombres réels. Ce fait est une des prémices de la théorie des représentations des algèbres associatives. Ce n'est pourtant qu'en 1929 qu'Emmy Noether [Noe29] a donné son sens actuel au terme représentations des algèbres. On vit alors une représentation comme un A-module.

Depuis la fin des années 1960, cette théorie a connu un développement fulgurant. En particulier, la théorie de l'inclinaison a fait son apparition en 1973 dans la preuve qu'ont faite Bernstein, Gel'fand et Ponomarev [BGP73] du théorème de Gabriel. Par la suite, Auslander, Platzeck et Reiten [APR79] ont généralisé cette approche. Les premières bases solides de cette théorie ont été établies par Brenner et Butler [BB80] et ils ont notamment été les premiers à définir de façon axiomatique ce qu'est un module inclinant. Enfin, soulignons l'apport à la théorie de l'inclinaison de Happel et Ringel [HR82] qui ont permis de relaxer les conditions de Brenner et Butler. L'importance de la classe des algèbres inclinées ne fait aucun doute, car elles permettent en un sens de comprendre certains modules sur des algèbres arbitraires. En effet, supposons que M est un module indécomposable sur une algèbre arbitraire B tel qu'il n'existe pas de suite

$$M = M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{t-1} \xrightarrow{f_{t-1}} M_t = M$$

où les f_i sont des morphismes non nuls et non inversibles et les M_i sont des B-modules indécomposables pour $i = 0, 1, \ldots, t$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de cycle passant par M dans la catégorie mod B des B-modules à droite de type fini). Alors, il existe une algèbre inclinée A telle que M soit un A-module [Rin84].

Une autre classe, celle des algèbres de corde, nous sera très utile. Elles ont fait leur apparition pour la première fois, de façon implicite, dans le travail de Wald et Waschbüsch [WW85]. C'est toutefois Butler et Ringel [BR87], en 1987, qui en ont fourni une première définition formelle. Nous utiliserons la description de [BR87] des modules indécomposables sur celles-ci et des morphismes irréductibles entre ces modules.

Le résultat principal du troisième chapitre n'est pas nouveau. Huard l'a démontré en 1997, l'a généralisé au cas des algèbres de corde en collaboration avec Liu [HL00], puis l'a fait dans le cadre plus général des algèbres bisérielles spéciales [Hua98] [HL99], définies par Skowronski et Waschbüsh [SW83]. La démonstration qui sera fournie utilise quant à elle la notion de double-zéro historiquement attribuée à Bautista, mais définie sous sa forme actuelle par Assem [Ass82]. Cette nouvelle démonstration permet, en plus de classifier les algèbres inclinées dont le graphe sous-jacent au carquois ordinaire est $\mathbb{A}_n$, d'inférer sur le type de ces algèbres.

On verra dans le premier chapitre que toute algèbre A sobre, connexe et de dimension finie sur un corps algébriquement clos k peut être représentée par une structure à la fois graphique et algébrique que nous appellerons carquois lié. Celle-ci nous permettra d'en construire une seconde, le carquois d'Auslander-Reiten de A qui, au deuxième chapitre, nous permettra d'étudier la catégorie mod A. Le chapitre suivant sera consacré à la notion d'algèbres inclinées et à la démonstration du résultat principal. Enfin, le quatrième chapitre servira à énoncer une conjecture dans le cas où le graphe sous-jacent est $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$.

Quoique les notions de base en théorie des représentations des algèbres soient reprises depuis le début, on suppose du lecteur une solide connaissance en algèbre.

CHAPITRE 1

Mettre ici le titre du chapitre 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque vestibulum lacus a nunc pulvinar ac ornare augue placerat. Duis eu diam lectus. Maecenas dapibus lobortis odio, in mattis nunc adipiscing eu. Aliquam auctor nunc id nulla ultrices sit amet sodales tellus ultricies. Proin sed tellus vel nisi congue rhoncus non eget arcu. Nunc eget neque neque, in blandit augue. Praesent sit amet sapien sed metus tempus imperdiet. Maecenas vitae lectus sed lacus dapibus consequat. Suspendisse potenti. Nulla facilisi. Aenean varius, lorem eget dictum ornare, mi purus rhoncus mi, at pulvinar justo metus quis arcu. Maecenas fringilla, neque eu faucibus aliquet, ligula metus tincidunt velit, sit amet auctor felis urna et erat. Nunc arcu eros, suscipit non malesuada vehicula, fringilla eget risus. Quisque consectetur ultricies tincidunt. Phasellus dictum, diam vitae rhoncus auctor, ipsum erat tincidunt lacus, sed consectetur tortor lorem eu mauris.

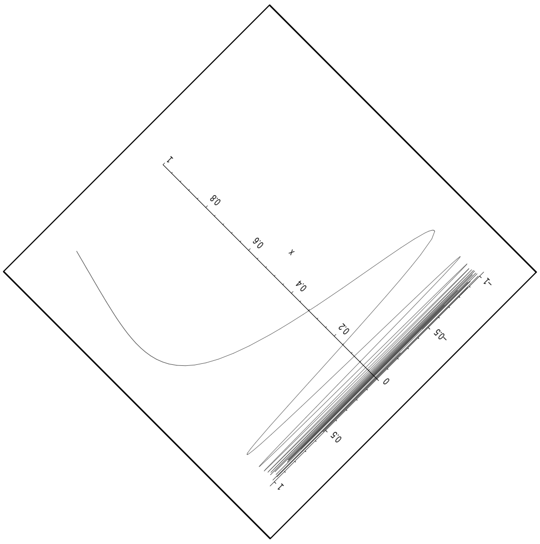

Figure 1.1 – ceci est le nom de la figure

Integer laoreet, dolor congue pharetra porta, magna erat iaculis turpis, sed pellentesque quam lacus vel nunc. Fusce pharetra lacus auctor eros pharetra fringilla. Sed faucibus nibh et odio volutpat eu blandit arcu sollicitudin. Pellentesque hendrerit sodales eros, et auctor elit cursus et. Nulla facilisi. Fusce eleifend faucibus nibh, et feugiat nunc dignissim in. Praesent pretium ullamcorper mollis. Duis molestie turpis id arcu condimentum malesuada sit amet non tellus. Donec id ante lacus. Duis ut nibh id mi iaculis molestie semper at mi. Proin id erat neque. Vivamus id leo eros, vitae fermentum augue. Sed posuere interdum placerat. Maecenas mi risus, semper et feugiat convallis, cursus vel lorem. Integer aliquam sodales magna, eu faucibus mauris fermentum a.

Integer porta consequat nisl ac scelerisque. In hac habitasse platea dictumst. Nam tincidunt commodo dolor, ut sollicitudin arcu pharetra nec. Maecenas sollicitudin sodales mattis. Aliquam eu rhoncus ipsum. Duis a metus leo, quis porta est. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae ; Nulla ac neque et ante vestibulum lacinia. Nullam semper, nisl eu viverra sodales, orci quam consectetur nisl, id interdum libero nulla vel urna. Nulla eleifend, odio vitae suscipit ultrices, odio augue pharetra odio, quis scelerisque justo mauris nec ipsum. Vivamus diam enim, bibendum sit amet scelerisque vitae, varius eu velit.

Aenean ac quam tincidunt velit porta elementum. Integer sed leo ac turpis vestibulum posuere eu vel arcu. Nunc mollis dui non magna rhoncus ut semper mi sodales. Sed ante diam, egestas ut fermentum ut, fringilla nec nunc. Proin facilisis sagittis sem, in cursus urna mattis eu. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Morbi vulputate iaculis malesuada. Nam laoreet eros et elit dictum suscipit. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae ; Integer gravida volutpat dui nec accumsan. Ut vitae odio vitae lorem vulputate mollis. Maecenas placerat, eros eget tincidunt vestibulum, dui erat tristique ligula, ut volutpat risus lacus et mi. Aliquam malesuada ante blandit velit iaculis tempus.

Figure 1.2 – Un gourou

Aliquam facilisis vehicula ligula sed convallis. Nam sit amet placerat diam. Pellentesque vel porta erat. Fusce bibendum turpis et neque tempor eu pharetra erat semper. Donec congue volutpat elementum. In egestas interdum purus ac faucibus. Sed id pellentesque risus. Aenean blandit sodales dolor vitae pulvinar. Vivamus ac nunc nibh, non malesuada dolor. Nunc convallis fermentum eros eu feugiat. Aliquam venenatis lectus at augue vehicula ut facilisis augue posuere. Nam odio tellus, malesuada non mattis sit amet, auctor sed augue. Mauris interdum scelerisque interdum. Donec facilisis feugiat erat, aliquam semper dui malesuada a. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Vivamus nulla arcu, egestas a placerat eu, tempus ac augue. Suspendisse sit amet magna ac velit auctor porttitor volutpat at neque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Suspendisse pretium, eros sit amet venenatis pharetra, nunc turpis ullamcorper velit, at porta nisi odio nec lacus.

1.1 titre section

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Morbi imperdiet eleifend turpis, non convallis libero ornare et. Pellentesque interdum odio et nisl auctor ullamcorper. Ut non felis quis magna vestibulum volutpat eu et nunc. Pellentesque adipiscing tincidunt lacus. Curabitur molestie hendrerit pellentesque. Nunc quis felis dolor. Cras commodo dolor mauris, a volutpat nisi. Proin vitae eros in mauris porta dictum. Cras et sapien odio, nec eleifend urna. Duis in felis nunc, eget sagittis massa. Morbi metus sem, venenatis vel rutrum id, pretium nec turpis. Nunc euismod, ante nec ultrices sollicitudin, neque ipsum ultrices tellus, eget convallis nisi mauris vel justo. Integer tincidunt ornare eros, vitae hendrerit massa ultrices aliquam. Nulla venenatis accumsan turpis vel rutrum. Suspendisse malesuada, odio eget venenatis elementum, odio dui suscipit justo, sed blandit erat leo id arcu. Aenean sed magna est.

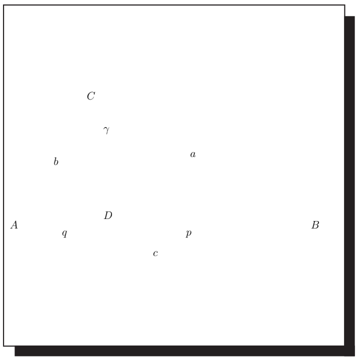

Figure 1.3 – La parallèle à d par P

Vivamus quis erat felis, id tincidunt odio. Praesent turpis nisi, molestie pellentesque aliquam in, dapibus quis urna. Aenean venenatis pellentesque augue, tincidunt scelerisque sapien posuere in. Fusce malesuada elit fringilla sapien pharetra id commodo magna convallis. Mauris nec viverra nunc. Proin dolor erat, ullamcorper porta dictum a, tempus a augue. Ut mollis, sapien sit amet consequat convallis, urna tortor gravida nulla, non euismod nunc leo tristique orci. Integer venenatis tempus mauris, eu dapibus felis porttitor et. Donec quis ipsum ac turpis tincidunt tempus vitae ac mauris. Cras posuere viverra ullamcorper. Duis mollis dapibus placerat. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae ; Nam a justo quis ligula semper tempor eget pretium nisl. Integer pellentesque vulputate mattis. Maecenas varius tellus nec dolor elementum ullamcorper. Vestibulum at ipsum quis erat bibendum iaculis. Maecenas quis varius nulla. Morbi vel est sapien. Duis lacinia vulputate ultricies. Duis augue augue, aliquet et accumsan a, semper varius nunc.

Nulla facilisi. Mauris ac elit eget elit aliquet facilisis non ac eros. Etiam rhoncus, eros ac faucibus mattis, felis elit laoreet mi, et lacinia dui leo in justo. Nam sit amet tellus eget lectus gravida ornare in non metus. Integer fringilla mauris at nulla adipiscing gravida ac a nisl. Etiam turpis nibh, venenatis eu venenatis ut, bibendum eget elit. Donec placerat placerat massa et bibendum. Etiam nec sapien sapien, viverra mattis odio. Nam interdum eleifend libero, sit amet convallis lorem laoreet eget. Sed varius, velit sed malesuada semper, mauris purus sagittis sapien, quis volutpat metus diam vel arcu. Suspendisse potenti. Quisque sed lectus eros. Pellentesque justo nibh, scelerisque in semper ut, fringilla non nulla. Quisque convallis, enim sed auctor condimentum, tellus diam iaculis nulla, eget elementum elit mi nec eros. Morbi scelerisque sapien vitae purus lobortis eleifend. Nulla lacinia feugiat ullamcorper. Aenean id mi nec leo venenatis lacinia quis non urna. In sodales, nibh in sollicitudin dapibus, mi massa egestas dui, eu aliquam lacus odio ut eros. Praesent adipiscing magna ac dui fringilla id iaculis ante rhoncus.

1.2 titre section

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut hendrerit nibh quis arcu sodales tincidunt. Proin adipiscing volutpat urna, id volutpat magna mattis vitae. Duis quis nibh nisl. In a neque ut est sollicitudin fringilla vitae et felis. Praesent nec orci non nisi pulvinar gravida eu vel ante. Morbi nec nulla sit amet diam vulputate posuere et ac mi. Duis vel enim dolor, vitae semper justo. Cras malesuada imperdiet ullamcorper. Integer bibendum eros non massa egestas consequat. Fusce vitae libero eros. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Quisque in sapien in purus posuere vestibulum sagittis non magna. In dapibus enim non quam scelerisque tristique. Ut iaculis tortor eu est porttitor in auctor nibh pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Etiam tincidunt ultricies enim, id mollis velit elementum eget. In hac habitasse platea dictumst. Praesent eget est vitae ligula tristique viverra. Maecenas ultrices bibendum mi volutpat porttitor.

Integer posuere scelerisque turpis quis auctor. Maecenas congue dui non purus rhoncus sagittis. Maecenas vulputate quam vitae mauris sodales aliquet. Maecenas nec mauris ut nisi accumsan accumsan eget eu elit. Vestibulum scelerisque est quis enim pharetra in porta nisi venenatis. Etiam malesuada orci in eros ornare dapibus. Cras cursus facilisis nisl ac porta. Aenean est odio, mattis vitae gravida ut, mattis quis felis. Maecenas scelerisque, leo non ultricies adipiscing, dolor dui eleifend justo, sit amet convallis neque leo eget eros. Ut bibendum fringilla nibh at posuere.

1.2.1 titre sous-section

In urna mi, volutpat ut venenatis quis, blandit sit amet sem. Vivamus dapibus dui nec ligula commodo dapibus pellentesque mi feugiat. Ut in pulvinar urna. Mauris varius neque sit amet orci pulvinar sed luctus diam posuere. Ut quam purus, adipiscing rhoncus sagittis eget, bibendum sit amet justo. Phasellus dictum placerat ligula, non ornare lectus luctus ut. Etiam ultrices metus in velit blandit venenatis. Aliquam ut velit condimentum eros semper blandit. Curabitur eget velit vel nulla volutpat imperdiet at eu arcu. Nam fringilla urna ac arcu venenatis non posuere eros sodales.

titre sous-sous-section

Praesent placerat accumsan velit. Nulla facilisi. Nullam a justo nisl, at tempus lacus. Mauris vehicula luctus elit, sed eleifend tellus interdum vitae. Sed porttitor mattis tincidunt. Pellentesque neque odio, vehicula sit amet sodales ac, blandit faucibus dolor. Donec nisi diam, adipiscing ac ultricies sed, sagittis sit amet mauris. Etiam sagittis arcu ac ipsum scelerisque in egestas justo commodo. Cras a varius dolor. Integer bibendum nibh eget felis sollicitudin tristique. Suspendisse ac magna ut erat lobortis rhoncus eu vel lacus. Nam vitae nulla id massa gravida pellentesque in nec lectus. Cras et metus in libero volutpat tincidunt.

CHAPITRE 2

titre chapitre 2

blablabla...

Ceci est mon premier tableau :

colonne1	colonne2	colonne 3
1	2	3
a	b	c

Tableau 2.1 – titre du tableau 1

2.1 titre section

blablabla...

Ceci est mon deuxième tableau :

$$
\begin{aligned}
e^{i\pi} &= \cos\pi + i\sin\pi \\
&= -1 + i\cdot 0 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Tableau 2.2 – titre du tableau 2

CHAPITRE 3

titre chapitre 3

blablablablablabla...

3.1 titre section

3.2 titre section

blablabla

CHAPITRE 4

titre chapitre 4

4.1 titre section

blablabla

CHAPITRE 5

titre chapitre 5

5.1 titre section

blabla

CONCLUSION

Dans le troisième chapitre, nous avons caractérisé, au moyen de leurs carquois liés, les algèbres inclinées dont le graphe sous-jacent au carquois ordinaire est un diagramme de Dynkin $\mathbb{A}_n$. Puisque essentiellement nous avons utilisé la caractérisation des modules indécomposables et des morphismes irréductibles de [BR87] sur les algèbres de corde, on peut se demander s'il ne serait pas possible de généraliser la démonstration aux algèbres de corde. Évidemment, il serait également intéressant de pouvoir généraliser ce résultat et de construire une tranche complète particulière dans les cas $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ et $\mathbb{E}_8$ et leurs correspondants euclidiens $\widetilde{\mathbb{A}_n}$, $\widetilde{\mathbb{D}_n}$, $\widetilde{\mathbb{E}_6}$, $\widetilde{\mathbb{E}_7}$ et $\widetilde{\mathbb{E}_8}$, par exemple.

Certaines orientations de ces diagrammes mènent toutefois à des algèbres qui ne sont pas de corde. Une avenue qui semble prometteuse serait de voir ces algèbres comme des extensions ou des coextensions ponctuelles par des modules projectifs ou injectifs, respectivement (voir par exemple [Rin84][pp. 90 et 259] et [Hua]).

Ainsi, on aurait une classification complète de toutes les algèbres inclinées de diagramme sous-jacent Dynkin ou Euclidien et on obtiendrait en plus le type de celles-ci.

Mentionnons enfin que Huard a obtenu récemment un résultat permettant de classifier les algèbres inclinées ayant pour diagramme sous-jacent $\mathbb{D}_n$, mais qu'on ne peut rien en inférer quant au type de l'algèbre.

ANNEXE A

blabla

Bibliographie

[APR79] M. Auslander, M.I. Platzeck, and I. Reiten. Coxeter Functors Without Diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250 :1–46, 1979.

[Ass82] I. Assem. Tilted Algebras of Type $\mathbb{A}_n$. *Comm. Algebra*, 10(19) :2121–2139, 1982.

[BB80] S. Brenner and M.C.R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gel'fand-Ponomarev Reflection Functors. *Springer Lecture Notes*, 832 :103–169, 1980.

[BGP73] I.N. Bernstein, I.M. Gel'fand, and V.A. Ponomarev. Coxeter Functors and Gabriel's Theorem. *Russian Math. Surveys*, 28 :17–32, 1973.

[BR87] M.C.R. Butler and C.M. Ringel. Auslander-Reiten Sequences With Few Middle Terms and Applications to String Algebras. *Communications in Algebra*, 15(1-2) :145–179, 1987.

[Ham37] W. Hamilton. Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples ; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *Trans. Royal Irish Acad.*, 17 :293–422, 1837.

[HL99] F. Huard and S. Liu. Tilted Special Biserial Algebras. *J. Algebra*, 217(2) :679–700, 1999.

[HL00] F. Huard and S. Liu. Tilted String Algebras. *J. Pure and Appl. Algebra*, 153 :151–164, 2000.

[HR82] D. Happel and C.M. Ringel. Tilted Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274 :399–443, 1982.

[Hua] F. Huard. One-Point Extensions of Quasi-Tilted by Projectives. *Communications in Algebra. À paraître.*

[Hua98] F. Huard. Algèbres bisérielles spéciales inclinées. Thèse de doctorat, juillet 1998.

[Noe29] E. Noether. Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie. *Math. Z.*, 30 :641–692, 1929.

[Rin84] C.M. Ringel. *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms.* Number 1099 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984.

[SW83] A. Skowroński and I. Waschbüsch. Representation-Finite Biserial Algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 345 :172–181, 1983.

[WW85] B. Wald and I. Waschbüsch. Tame Biserial Algebras. *J. Algebra*, 95 :480–500, 1985.